Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.
ANÁLISIS MATEMÁTICO III

APUNTES DE ANÁLISIS DE VARIABLE COMPLEJA

D. Prelat - 2020

§4) LÍMITES Y CONTINUIDAD

Como ya hemos mencionado, los conceptos de límites y continuidad no presentan ninguna novedad esencial respecto de lo ya estudiado en Análisis I y II. La diferencia es, básicamente, de notación. Aprovecharemos para repasar estos conceptos mientras nos familiarizamos con la notación específica del Análisis de Variable Compleja.

Definición 4.1.: Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de *D* (z_0 puede pertenecer o no a *D*) y sea $l \in \mathbb{C}$ un número complejo. Entonces, se dice que "f tiende a *l* cuando *z* tiende a z_0", o bien que "*l* es límite de *f* cuando *z* tiende a z_0", sii: para cada (= todo) número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ para el cual se verifica la siguiente implicación (para todo $z \in \mathbb{C}$):

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |z - z_0| < \delta \\ y \text{ } además \\ z \in D \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon \qquad (4.1)$$

Observación 4.1: Como hemos indicado en la definición, z_0 puede pertenecer o no al dominio de *f*. Pero aún en el caso en que $z_0 \in D$, el valor de *f* en este punto no interviene en absoluto en la definición. (Lo mismo que en Análisis I y II)

Observación 4.2: No hemos utilizado la expresión "*l* es <u>el</u> límite de *f* cuando…." pues no es claro que exista un único límite (en caso de existir). (Lo mismo que en Análisis I y II) Esto va a ser remediado a continuación y es la razón fundamental de la exigencia de que el punto z_0 sea de acumulación.

Consecuencia 4.1 (*Unicidad del límite*) Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de *D* y sean $l \in \mathbb{C}$ y $l' \in \mathbb{C}$ dos números complejos tales que "f tiende a *l* cuando *z* tiende a z_0" y "f tiende a l' cuando *z* tiende a z_0". Entonces, $l = l'$.

Prueba: Por hipótesis, para cada $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $\delta' > 0$ para los cuales se verifican las dos siguientes implicaciones (para todo $z \in \mathbb{C}$):

$$\left.\begin{array}{l} 0<|z-z_0|<\delta \\ y \text{ además} \\ z\in D \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z)-l|<\varepsilon \quad , \qquad \left.\begin{array}{l} 0<|z-z_0|<\delta' \\ y \text{ además} \\ z\in D \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z)-l'|<\varepsilon \qquad (*)$$

Probaremos que $l \neq l'$ no puede ser cierto. ¿Qué pasaría si fuera $l \neq l'$? Podríamos elegir $\varepsilon = \frac{1}{9}|l'-l|$, número positivo. Entonces, para este $\varepsilon > 0$, existen $\delta > 0$ y $\delta' > 0$ para los cuales se verifican las dos implicaciones (*) anteriores. Elijamos el menor de éstos y designémoslo δ'', es decir: $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$. Este número es, obviamente, positivo. Por lo tanto, <u>por ser $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D</u>, existe al menos un $z_1 \in D$ tal que $0 < |z_1 - z_0| < \delta''$. Entonces, este punto z_1 verifica simultáneamente la condición $0 < |z_1 - z_0| < \delta$ (pues $0 < |z_1 - z_0| < \delta'' \leq \delta$) y la condición $0 < |z_1 - z_0| < \delta'$ (pues $0 < |z_1 - z_0| < \delta'' \leq \delta'$). Como además $z_1 \in D$, deducimos de las implicaciones (*) que se verifican simultáneamente las desigualdades $|f(z_1) - l| < \varepsilon$ y $|f(z_1) - l| < \varepsilon$. Pero entonces, $|l'-l| = |l' - f(z_1) + f(z_1) - l| \leq |l' - f(z_1)| + |f(z_1) - l| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{9}|l'-l|$. Es decir, llegamos a la desigualdad $|l'-l| \leq \frac{2}{9}|l'-l|$. Pero la suposición $l \neq l'$ equivale a $|l'-l| > 0$, y entonces obtenemos $1 \leq \frac{2}{9}$: absurdo. ■

Observación 4.3: La hipótesis de que z_0 es punto de acumulación de D es esencial para la prueba y hemos subrayado el paso donde se utiliza.

Observación 4.4: La elección de $\varepsilon = \frac{1}{9}|l'-l|$ puede reemplazarse, obviamente, por $\varepsilon = \frac{1}{3}|l'-l|$, por ejemplo. Cuestión de gustos y preferencias.

Una vez probada la unicidad del límite (cuando existe), podemos utilizar cualquiera de las notaciones habituales:

$$\underset{z \to z_0}{Lim} f(z) = l \qquad \text{o bien} \qquad f \xrightarrow[z \to z_0]{} l .$$

Tal como en el caso de límites de funciones reales de variable real, debe tenerse <u>muy presente</u> que:
(a) "*z* tiende a z_0 <u>en *D*</u>", es decir: si se utiliza la expresión cinemática "*z* se acerca a z_0", debe sobreentenderse "*z* se acerca a z_0 sin salirse de *D*".
(b) La primera de las desigualdades $0 < |z - z_0| < \delta$ significa que "*z* no puede ser z_0", ni <u>aún en el caso en que z_0 pertenezca a *D*</u>, y en este caso el valor $f(z_0)$ de la función en ese punto <u>no interviene de ninguna manera</u> en la existencia o no del límite ni en el valor de ese límite en caso de que exista. La relación entre el valor de la función en un punto

$z_0 \in D$ que además sea de acumulación de D y el límite $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, aparece con la noción de continuidad.

Estos dos aspectos esenciales del concepto de límite podrían incorporarse en la notación anterior, por ejemplo de la siguiente manera: $f \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} l$.

PROPOSICIÓN 4.1 (*Algunas cuestiones prácticas*)

i) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D y sea l un número complejo. Entonces:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z) - l| = 0$$

[Caso particular importante: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = 0$]

ii) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D y sea l un número complejo. Entonces:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = l \Rightarrow \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |l|$$

[No vale recíproca, salvo en el caso en que $l = 0$: ver propiedad anterior].

iii) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D y sea l un número complejo. Si $f \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} l$, entonces existen dos números reales positivos r y K tales que $|f(z)| \leq K$ para todo $z \in D(z_0, r) \cap D$.

iv) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D. Sea $D_0 \subseteq D$ un subconjunto del dominio de f tal que z_0 es punto de acumulación de D_0, y sea $f_{|D_0} : D_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ la restricción de f a D_0 (recordemos la definición: para cada $z \in D_0$ es $f_{|D_0}(z) = f(z)$). Entonces,

$$f \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} l \Leftrightarrow f_{|D_0} \xrightarrow[z \in D_0, z \neq z_0]{z \to z_0} l .$$

v) Sea $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función constante en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, es decir: existe $c \in \mathbb{C}$ tal que *f*(*z*) = *c* para todo $z \in D$ .Entonces, para cualquier punto $z_0 \in \mathbb{C}$ de acumulación de *D* se verifica que $f \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} c$.

vi) Sean $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $h: D \longrightarrow \mathbb{C}$ tres funciones definidas en un mismo conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ tales que *a*) $h \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} 0$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de *D*, *b*) *g* es acotada en *D*, es decir: existe una constante real positiva *K* tal que $|g(z)| \leq K$ para todo $z \in D$, y *c*) para todo *z* en *D*: $|f(z)| \leq |h(z)||g(z)|$. Entonces, $f \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} 0$.

Prueba: Omitimos la prueba de estas propiedades, que son simples ejercicios de aplicación de la definición de límite y totalmente análogas a las correspondientes de Análisis I. La propiedad *iii*) significa que cuando una función tiene límite (finito, como los que estamos considerando aquí) en un punto de acumulación de su dominio, entonces <u>es acotada en un entorno de dicho punto</u>. La propiedad *iv*) se usa en la práctica para el cálculo de límites, restringiendo el dominio de la función a un "entorno" de z_0 , lo mismo que en Análisis I. La propiedad *v*) es una de las más utilizadas para el cálculo de límites, en combinación con *i*). ■

Como casi todas las definiciones importantes, la definición de límite es muy poco práctica para el cálculo, salvo para algunas funciones muy sencillas, como las constantes y la identidad. El uso directo de la definición requiere, entre otras cosas, conocer el límite, que en muchos casos es imposible de intuir. Lo que siempre ayuda para estas cuestiones es una buena lista de propiedades que los matemáticos han encontrado a lo largo de los siglos.

PROPOSICIÓN 4.2 (*Álgebra de límites*) Sean $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g: D \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones definidas en un mismo conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ tales que $f \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} a$ y $g \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} b$, donde $z_0 \in \mathbb{C}$ es un punto de acumulación de *D*. Entonces:

i) $f + g \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} a + b$

ii) $fg \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} ab$

iii) Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D$ y además $b \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g} \xrightarrow[z \in D, z \neq z_0]{z \to z_0} \dfrac{a}{b}$.

Prueba: Las demostraciones son totalmente análogas a las correspondientes de Análisis I, y como en esos viejos tiempos, también la más delicada es la tercera. Para no olvidarnos de hacer alguna demostración de vez en cuando, probemos esta última. Conviene probar primero que $\frac{1}{g} \xrightarrow[z\in D, z\neq z_0]{z\to z_0} \frac{1}{b}$ y luego utilizar la propiedad *ii*). Las claves están en la proposición anterior. Esquemáticamente: para todo $z \in D$ podemos escribir

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - g(z)|}{|g(z)||b|}$$

Ahora, sería bueno acotar inferiormente el denominador del segundo miembro, aunque sea "localmente". Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|g(z) - b| < \varepsilon$ para todo $z \in D$ que verifica $0 < |z - z_0| < \delta$. Pero entonces, para estos puntos $z \in D$ se verifica que $\big||g(z)| - |b|\big| \leq |g(z) - b| < \varepsilon$, es decir: $-\varepsilon < |g(z)| - |b| < \varepsilon$, o bien: $|b| - \varepsilon < |g(z)| < \varepsilon + |b|$ Eligiendo $\varepsilon = \frac{1}{2}|b|$ (que por hipótesis es > 0), resulta $\frac{1}{2}|b| < |g(z)| < \frac{3}{2}|b|$. Concluimos que para todo $z \in D$ que verifica $0 < |z - z_0| < \delta$ se verifica la desigualdad $\frac{1}{|g(z)|} < \frac{2}{|b|}$.

Restringiendo el dominio *D* de la función *g* al conjunto $D_0 = \{z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta\}$, tenemos que para todo $z \in D_0$

$$\left|\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - g(z)|}{|g(z)||b|} < \frac{2}{|b|^2}|b - g(z)| \xrightarrow[z\in D_0, z\neq z_0]{z\to z_0} 0$$

Por los ítems *i*) y *iv*) de la proposición anterior deducimos que $\frac{1}{g} \xrightarrow[z\in D, z\neq z_0]{z\to z_0} \frac{1}{b}$. El único "detalle" que falta es probar que z_0 es punto de acumulación de D_0: dado un número real positivo cualquiera r, debemos encontrar $z \in D_0$ tal que $0 < |z - z_0| < r$. Pero por hipótesis, z_0 es punto de acumulación de *D*, por lo tanto, dado el número real positivo $r' = \min\{r, \delta\}$, existe $z_1 \in D$ tal que $0 < |z_1 - z_0| < r'$. Pero entonces, $z_1 \in D_0$, pues $z_1 \in D$ y $0 < |z_1 - z_0| < r' \leq \delta$. Este punto $z_1 \in D_0$ verifica $0 < |z_1 - z_0| < r' \leq r$ ■

Con la siguiente propiedad, nos movemos hacia los tiempos más cercanos de Análisis II.

PROPOSICIÓN 4.3 (*Límites por componentes*) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de *D*. Sean $u : D \longrightarrow \Re$ y $v : D \longrightarrow \Re$ las partes real e imaginaria de *f*, respectivamente. Es decir, para cada $z = x + iy \in D$: $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Finalmente, sea $l = a + ib$ un número complejo. Entonces,

$$\lim_{x+iy \to x_0+iy_0} f(x+iy) = a+ib \iff \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ y \text{ además} \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$$

***Prueba**:* La prueba es la misma, con otra notación, que la del "límite componente a componente" de los campos vectoriales. La clave está en las desigualdades

1) $|u(x,y)-a| \leq \sqrt{|u(x,y)-a|^2 + |v(x,y)-b|^2} = |f(x+iy)-(a+ib)|$

2) $|v(x,y)-b| \leq \sqrt{|u(x,y)-a|^2 + |v(x,y)-b|^2} = |f(x+iy)-(a+ib)|$

3) $|f(x+iy)-(a+ib)| = \sqrt{|u(x,y)-a|^2 + |v(x,y)-b|^2} = |u(x,y)-a| + |v(x,y)-b|$

Con las dos primeras se prueba la implicación $\Rightarrow$ y con la tercera la recíproca $\Leftarrow$. ■

Con estas propiedades, el alumno puede recurrir a las herramientas que más le gusten para el estudio de límites de funciones de variable compleja. El uso de la Propiedad 4.3 puede embarcarlo hacia las aguas turbulentas de los límites dobles… Recordemos que una función $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ como la del enunciado de esta última proposición, en Análisis II venía con otro uniforme: $\vec{f} : D \longrightarrow \Re^2$, donde para cada (*x*,*y*) en *D*: $\vec{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. El uso casi universal de las letras *P* y *Q* para las componentes de los campos vectoriales en el plano que habitaban el Análisis II, en Análisis III se reemplaza por el uso, también universal, de las letras *u* y *v*. Curiosidades de la historia.

Pasemos ahora al segundo concepto fundamental de este parágrafo. La definición que sigue es la misma que en Análisis I. Pero antes de darla, le propongo dos problemitas muy sencillos de Análisis I:

(a) ¿Existe el límite $\lim_{x \to -3} \sqrt{x}$?

(b) ¿Es continua la función $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2} + 3$?

En a) estamos considerando, como en Análisis I, a la función raíz cuadrada como función real, es decir: con dominio $[0,+\infty)$. Si usted piensa que el límite a) no existe porque -3 no está en el dominio de la función, le sugiero pensar en el caso $\frac{sen(x)}{x}$, cuyo límite para *x* tendiendo a 0 es más conocido y popular que el Diego, y sin embargo 0 no está en el dominio de esta función. Respecto del problema b), le sugiero hacer el gráfico. El dominio de la función consiste en un par de puntos aislados, -1 y 1, por lo tanto el gráfico de f consiste en un par de puntos del plano: $\{(-1,3),(1,3)\}$. Respondamos (a): el punto -3 no es punto de acumulación del dominio de la función, por lo tanto no tiene sentido el concepto de límite en este caso. Si a usted le molesta esto, podría eliminar, en la definición de límite, la condición de que el punto en cuestión sea de acumulación del dominio. Pero se va a encontrar con un problema mayor: la no unicidad del límite. Peor aún: el límite $\underset{x \to -3}{Lim} \sqrt{x}$ sería el número que a usted se le ocurra. Sería cierto que, por ejemplo $\underset{x \to -3}{Lim} \sqrt{x} = 18$, pues para cualquier $\varepsilon > 0$ la implicación

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |x-(-3)| < 1 \\ y\ además \\ x \in [0,+\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\sqrt{x} - 18\right| < \varepsilon$$

es verdadera, por tener el antecedente falso. Seguramente a usted le molesta todo esto, parece muy complicado. Pero creo que debemos tener presente un par de hechos que deberían tener mejor publicidad. En primer lugar, el concepto de límite nunca fue sencillo, no lo es, y nunca lo será. Si a usted se lo cuentan de una forma muy fácil de entender, desconfíe. Se lo están contando mal. Algunos creen que el universo tiene la obligación de ser sencillo para que el ser humano pueda comprenderlo. No es mi caso y nunca entendí el origen de esa creencia. Los tiempos que corren son una prueba contundente de que el universo se puede poner muy complicado…. El segundo hecho a tener en cuenta es que la solución al primer problema planteado es conocida desde hace un siglo y medio, por lo menos. Lo único que hay que hacer para alejar engendros como "$\underset{x \to -3}{Lim} \sqrt{x} = 18$" es incorporar la condición de que el punto sea de acumulación en la definición de límite. Tan sencillo como esto. Ya lo descubrieron los grandes matemáticos del siglo XIX.

Pasemos ahora al segundo problema, el de la continuidad de f. Si usted piensa que f no es continua por que tiene un gráfico de porquería, le sugiero recordar algunas cuestiones: las funciones constantes son continuas; las restricciones de funciones continuas son continuas; las sumas y composiciones de funciones continuas son continuas. Con esto resulta evidente que la función f es, efectivamente continua en cada uno de los dos puntos de su dominio. Y sin embargo, no tiene sentido plantear la existencia de los límites $\underset{x \to -1}{Lim} f(x)$ y $\underset{x \to -1}{Lim} f(x)$. ***Por lo tanto, la definición de continuidad no puede involucrar la existencia de límites***. Si esto lo sorprende, porque la definición que conoció de continuidad utilizaba el concepto de límite, lamento informarle que la definición que daremos a continuación no es un invento reciente, es del siglo XIX y fue propuesta por Weierstrass y Jordan, dos de los matemáticos más rigurosos de la historia. Veamos primero el caso de funciones reales:

***Definición de continuidad para funciones reales*:** Una función $f: D \longrightarrow \Re$ definida en un conjunto $D \subseteq \Re$ *es continua en un punto* $x_0 \in D$ sii para cada (= todo) número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ para el cual se verifica la siguiente implicación (para todo real *x*):

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| < \delta \\ y \text{ además} \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Obsérvese que con esta definición, la función $f: \{-1,1\} \longrightarrow \Re$ del problema b), dada por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2} + 3$, es continua en cada uno de los dos puntos de su dominio. Probemos su continuidad en $x_0 = 1$ (en $x_0 = -1$ la prueba es análoga): para cualquier $\varepsilon > 0$ basta elegir $\delta = \frac{1}{2}$, pues

$$\left.\begin{array}{l} |x - 1| < \frac{1}{2} \\ y \text{ además} \\ x \in \{-1,1\} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow |f(x) - f(1)| = 0 < \varepsilon$$

Ahora estamos en condiciones de replicar el concepto para funciones complejas.

DEFINICIÓN 4.2. Una función $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ *es continua en un punto* $z_0 \in D$ sii para cada (= todo) número real $\varepsilon > 0$ existe un número real $\delta > 0$ para el cual se verifica la siguiente implicación (para todo complejo *z*):

$$\left.\begin{array}{l} |z - z_0| < \delta \\ y \text{ además} \\ z \in D \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \qquad (4.2)$$

Si *f* es continua en todos los puntos de su dominio, diremos simplemente que *f* es continua, sobreentendiendo que lo es en cada punto.

Observación 4.5: Obsérvese la “sutil” diferencia con la definición de límite: en el antecedente de la implicación (4.2) tenemos $|z - z_0| < \delta$ en lugar de $0 < |z - z_0| < \delta$. La razón fundamental es que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ se verifica trivialmente para $z = z_0$, que es un punto del dominio de f, y lo mismo ocurre con el antecedente.

Ahora viene la relación entre límites y continuidad, para tranquilidad de todos.

PROPOSICIÓN 4.4: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$ un punto del dominio de f que además es punto de acumulación de D. Entonces,

$$f \text{ es continua en } z_0 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{z \longrightarrow z_0}{Lim} f(z) = f(z_0)$$

Prueba: basta escribir las definiciones. ■

Ahora, lo mismo que en Análisis I, veamos que las funciones continuas tienen propiedades operativas muy importantes.

PROPOSICIÓN 4.5 (*Álgebra de continuas*)

(A) Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones definidas en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, ambas continuas en un punto $z_0 \in D$. Entonces:

i) Para todo subconjunto $D_0 \subseteq D$ tal que $z_0 \in D_0$, la restricción $f_{|D_0} : D_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua en z_0.

ii) $f + g, f - g$ y fg son continuas en z_0. Si además g no se anula en ningún punto de D, también $\dfrac{f}{g}$ es continua en z_0.

(B) Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones definidas en conjuntos $D \subseteq \mathbb{C}$ y $E \subseteq \mathbb{C}$ tales que: 1) la imagen de f está contenida en el dominio E de g, es decir: existe la composición $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{C}$; 2) f es continua en un punto $z_0 \in D$ y 3) g es continua en el punto $w_0 = f(z_0)$. Entonces, $g \circ f$ es continua en z_0.

(C) Son continuas:
(C.1) todas las funciones polinómicas $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es decir, las funciones de la forma $P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ... + c_m z^m$, donde $c_0, c_1, ..., c_m$ son constantes complejas. En

particular son continuas las funciones constantes, la función identidad $z \mapsto z$ y cada una de las potencias $z \mapsto z^k$.

(C.2) la función $J : \mathbb{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ tal que $J(z) = \dfrac{1}{z}$

(C.3) las funciones racionales, es decir, las de la forma $\dfrac{P}{Q}$, donde P y Q son polinómicas [Obviamente, el dominio es $\{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$].

***Prueba**:* Por ahora lo dejamos como ejercicio. Son propiedades totalmente análogas a las de Análisis I. Como guía, solamente vamos a dar algunas sugerencias: para probar que el cociente de continuas es continua, conviene primero probar que la composición de continuas es continua (ítem (B)), luego que el producto de continuas es continua y finalmente que la inversión (C.2) es continua. De ese modo, escribimos $\dfrac{f}{g} = f.(J \circ g)$ como producto de continuas. Lo que debe tenerse presente es que los ítems (A) y (B) son verdaderas máquinas para producir funciones continuas. Por ejemplo, una vez que uno prueba que las constantes y la identidad son continuas, utilizando (A) reiteradamente se deduce inmediatamente que las funciones polinómicas son continuas. ■

Antes de navegar otra vez hacia el Análisis II, veamos un par de cuestiones prácticas.

PROPOSICIÓN 4. 6. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$, continua en un punto $z_0 \in D$. Entonces:

(*i*) La función $|f| : D \longrightarrow \Re$ es continua en z_0.

(*ii*) Si $f(z_0) \neq 0$, existe $r > 0$ tal que para todo $z \in D(z_0, r) \cap D$ también se verifica que $f(z) \neq 0$.

Prueba: El ítem (*i*) se deduce de la desigualdad $\big|\,|f(z)| - |f(z_0)|\,\big| \leq |f(z) - f(z_0)|$, pues entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \Rightarrow \big|\,|f(z)| - |f(z_0)|\,\big| < \varepsilon$ (completar la prueba). Para el ítem (*ii*) podemos utilizar directamente la definición de continuidad y la propiedad anterior, eligiendo convenientemente ε: dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe $\delta > 0$ tal que $\big|\,|f(z)| - |f(z_0)|\,\big| < \varepsilon$ si $z \in D$ y además $|z - z_0| < \delta$. Es decir:

$$|f(z_0)| - \varepsilon < |f(z)| < |f(z_0)| + \varepsilon \quad \text{para todo} \quad z \in D \cap D(z_0, \delta)$$

Eligiendo $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(z_0)|$, que por hipótesis es > 0, resulta que para todo $z \in D \cap D(z_0, \delta)$ tenemos $|f(z)| > |f(z_0)| - \varepsilon = \frac{1}{2}|f(z_0)| > 0$ ■

Ahora sí, hacia el Análisis II:

PROPOSICIÓN 4.6 (*Continuidad por componentes*) Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Sean $u : D \longrightarrow \Re$ y $v : D \longrightarrow \Re$ las partes real e imaginaria de *f*, respectivamente. Es decir : para cada $z = x + iy \in D$: $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Entonces,

$$f \text{ es continua en } z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow u \text{ y } v \text{ son continuas en } (x_0, y_0)$$

Prueba: La prueba es la misma, con otra notación, que la de la continuidad "componente a componente" de los campos vectoriales. La clave está en las desigualdades

1) $$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| \le \sqrt{|u(x,y) - u(x_0,y_0)|^2 + |v(x,y) - v(x_0,y_0)|^2} = \\ = |f(x+iy) - f(x_0 + iy_0)|$$

2) $$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| \le \sqrt{|u(x,y) - u(x_0,y_0)|^2 + |v(x,y) - v(x_0,y_0)|^2} = \\ = |f(x+iy) - f(x_0 + iy_0)|$$

3) $$|f(x+iy) - f(x_0 + iy_0)| = \sqrt{|u(x,y) - u(x_0,y_0)|^2 + |v(x,y) - v(x_0,y_0)|^2} = \\ |u(x,y) - u(x_0,y_0)| + |v(x,y) - v(x_0,y_0)|$$

Con las dos primeras se prueba la implicación $\Rightarrow$ y con la tercera la recíproca $\Leftarrow$. ■

Ahora, el alumno tiene la posibilidad de utilizar todo lo que sabe continuidad de funciones de varias variables reales para el estudio de la continuidad de funciones de variable compleja. De todos modos, debe ser criterioso para elegir el método. Por ejemplo: para estudiar la continuidad de la función $f(z) = \dfrac{(z-i)^7}{2z - z^4}$ utilizando la Propiedad 4.6 , debe calcular primero sus partes real e imaginaria, lo que no parece muy eficiente. Es mejor, en este caso, la Proposición 4.5. En cambio, para la función $g(x+iy) = \dfrac{x^2 + y}{1 + y^2 - xy} + i\dfrac{xy - 1}{x^2 + y^4}$, ¿cuál elegiría?

Para terminar este parágrafo, algo sobre límites infinitos. Aquí es conveniente, cree el autor, no hacer ninguna mención a Análisis I y II.

DEFINICIÓN 4.3. Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un punto de acumulación de D. Entonces, definimos: $\underset{z \longrightarrow z_0}{Lim} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow$ para cada $K > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(z)| > K$ para todo $z \in D \cap D(z_0, \delta)$.

Observación 4.6: Puede probarse fácilmente que $\underset{z \longrightarrow z_0}{Lim} f(z) = \infty$ sii existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D \cap D(z_0, r)$ y además $\underset{z \longrightarrow z_0}{Lim} \dfrac{1}{f(z)} = 0$.

El uso de la inversión puede utilizarse también para definir

$$\underset{z \longrightarrow \infty}{Lim} f(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \underset{z \longrightarrow 0}{Lim} f(\tfrac{1}{z}) = l$$

Para que esta definición tenga sentido es necesario, obviamente, que el 0 sea punto de acumulación del dominio de la función $z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Una forma de entender geométricamente estos límites es la incorporación del "punto del infinito" al plano complejo mediante la proyección estereográfica. Esta proyección ya era conocida en el siglo II y fue utilizada por Bernhard Riemann (siglo XIX) en sus trabajos sobre lo que se conoce en la actualidad como "superficies de Riemann". La obra de Riemann es de una magnitud y de una profundidad que va mucho más allá del alcance de este curso, que consiste en una breve introducción al análisis de variable compleja. En su homenaje es que denominamos hoy en día "esfera de Riemann" a la proyección estereográfica del plano complejo y la presentaremos en otro apartado.

APÉNDICE: (*Continuidad secuencial*) Se trata de una relación importantísima entre límites de sucesiones y funciones continuas. Usted la ha utilizado mucho en su más tierna infancia, probablemente - casi seguramente - sin darse cuenta. Por ejemplo, cuando calculaba el siguiente límite sencillito: $\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \cos(\frac{1}{n}) = \cos(\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \frac{1}{n}) = \cos(0) = 1$ Pero el intercambio de la función coseno con el paso al límite es un paso muy audaz. Por ejemplo, si en lugar de coseno tenemos la función $f : \Re \longrightarrow \Re$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leq 0 \end{cases},$$

resulta que $\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \overbrace{f(\tfrac{1}{n})}^{=1 \text{ para todo } n} = 1 \neq 0 = f(0) = f(\underset{n \longrightarrow \infty}{Lim} \frac{1}{n})$. Es decir, en este caso no es válido el intercambio de la función con el paso al límite. Pero entonces, ¿cuándo se puede y cuando no se puede intercambiar? La respuesta a este enigma (válida tanto para funciones reales como complejas) es muy sencilla y está dada por el siguiente:

TEOREMA 4.1: Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ una función definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in D$. Entonces, f es continua en z_0 si y solamente si: para toda sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de D tal que $\underset{n\to\infty}{Lim} a_n = z_0$ se verifica $\underset{n\to\infty}{Lim} f(a_n) = f(z_0)$, es decir:

$$\underset{n\to\infty}{Lim} f(a_n) = f(\underset{n\to\infty}{Lim} a_n)$$

Demostración: Obra en construcción. Disculpe las molestias. Mientras tanto puede consultar la abundante bibliografía correspondiente o intentar usted mismo la demostración. La implicación ($\Rightarrow$) es muy sencilla, pues si f es continua en z_0, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ para todo $z \in D$ que verifique $|z - z_0| < \delta_\varepsilon$ Ahora, para este $\delta_\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - z_0| < \delta_\varepsilon$ para todo $n > n_\varepsilon$. Pero entonces, como $a_n \in D$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(a_n) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Es decir: $\underset{n\to\infty}{Lim} f(a_n) = f(z_0)$. La recíproca ($\Leftarrow$) no es tan sencilla y suele demostrarse por absurdo.■